PREPARATION AU PROBATOIRE 'C'

Par Bernard ETO MONEONDO

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice 1 (4 points)

Le plan vectoriel E est rapporté à la base $B = (\vec{i}, \vec{j})$. On note Φ l'endomorphisme de E qui au vecteur $\vec{u}(x, y)$ associe le vecteur $\vec{u}'(x', y')$ tel que : $\begin{cases} x' = -2x + 2y \\ y' = x - y \end{cases}$.

1. Déterminer la matrice de Φ dans la base B. **0,5 pt**

2. L'endomorphisme Φ est-il bijectif ? Justifier. **0,5 pt**

3. a) Déterminer le noyau KerΦ et l'image ImΦ de Φ. **1 pt**

b) Déterminer les réels a et b tels que les vecteurs $\vec{m} = \vec{i} + a\vec{j}$ et $\vec{n} = b\vec{i} + \vec{j}$ appartiennent respectivement à KerΦ et à ImΦ. **1 pt**

4. On pose $\vec{I} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{J} = -2\vec{i} + \vec{j}$.

a) Monter que $B' = (\vec{I}, \vec{J})$ est une base de E. **0,5 pt**

b) Donner la matrice de Φ dans cette base. **0,5 pt**

Exercice 2 (5 points)

$ABCDA'B'C'D'$ est un pavé droit tel que $AB = 6$, $AD = 3$ et $AA' = 3$. On note I, J, K et L les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[CD]$, $[C'D']$ et $[A'B']$.

1. Montrer que les quadrilatères $AIJD$, $LB'C'K$ et $IJKL$ sont des carrés. **0,75 pt**

2. On pose $\vec{i} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$.

a) Justifier que $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé. **0,5 pt**

b) Déterminer les coordonnées des sommets du pavé droit ainsi que celles des points I, J, K et L dans ce repère. **1 pt**

3. Soient O le centre du carré $AIJD$, O' le centre du carré $LB'C'K$ et Ω le centre du carré $IJKL$. Déterminer les coordonnées des points O, O' et Ω. **0,75 pt**

4. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{D'O}$ et $\overrightarrow{O'B}$. En déduire la nature du quadrilatère $OBO'D'$. **0,5 pt**

5. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{O\Omega}$ et $\overrightarrow{OO'}$ sont colinéaires. Préciser la position du point Ω sur le segment $[OO']$. **0,5 pt**

6. Justifier que les droites (OO') et $(D'B)$ sont concourantes et préciser leur point commun. **0,5 pt**

Problème (11 points)

Le problème comporte trois parties indépendantes.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $D = \mathbf{R} - \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x - 2}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.a) Calculer les limites de f aux bornes de D. **1 pt**

b) Montrer que la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe (C). **0,25 pt**

2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. **1 pt**

3. Montrer que le point $\Omega(2, -2)$ est centre de symétrie pour la courbe (C). **0,25 pt**

4. Tracer la courbe (C). **1 pt**

5. Soit g la fonction définie par $g(x) = f(|x|)$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de g. **0,25 pt**

b) Etudier la parité de la fonction g. **0,25 pt**

c) Comparer $f(x)$ et $g(x)$ pour x positif, x différent de 2. **0,25 pt**

c) Construire la courbe (C') représentative de g dans le même graphique que (C). **0,75 pt**

d) Discuter graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation

$$g(x) = m$$ **0,5 pt**

Partie B

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{-1}{u_n - 2} \end{cases}, \ n\in\mathbb{N}.$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. **1 pt**

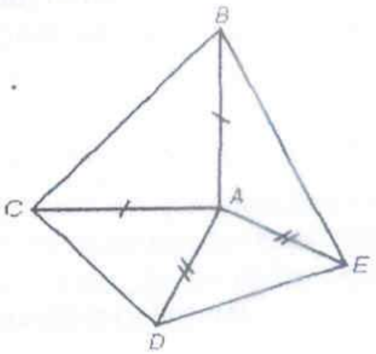
2. On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique. Préciser son premier terme et sa raison. **1 pt**

b) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n. **1 pt**

c) En déduire la limite de la suite (u_n). **0,5 pt**

Partie C



ABC et ADE sont des triangles rectangles et isocèles en A.

1. Montrer que $\vec{AB}.\vec{AD} = \vec{AC}.\vec{AE}$. **0,5 pt**

2. En déduire que $(\vec{AB}+\vec{AE}).(\vec{AD}-\vec{AC}) = 0$. **0,5 pt**

3. Soit I le milieu de $[BE]$. Démontrer que les droites (AI) et (CD) sont perpendiculaires. **1 pt**