PREPARATION AU BACCALAUREAT D
Par Bernard ETO MONEVONDO
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

1. Résoudre dans **R×R** le système $\begin{cases} x^2+y^2=68 \\ xy=16 \end{cases}$.

2. u_1, u_2 et u_3 sont des termes d'une suite géométrique décroissante (u_n) tels que :

$$\begin{cases} u_1u_2u_3=64 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=84 \end{cases}$$

a) Calculer u_1, u_2 puis u_3 et la raison q de la suite (u_n).
b) Montrer que $u_n = 2^{4-n}$. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
c) On pose $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Exprimer S_n en fonction de n et calculer sa limite.

EXERCICE 2

I/ **C** désigne l'ensemble des nombres complexes.
On pose $p(z) = z^3 - (6+5i)z^2 + (3+20i)z + 10 - 15i$.
1. Déterminer les racines carrées de $-2i$.
2. Résoudre dans **C** l'équation (E) : $z^2 - (3+3i)z + 5i = 0$.
3. a) Montrer que $p(z) = (z^2 - (3+3i)z + 5i)(z - (3+3i))$.
b) En déduire les solutions dans **C** de l'équation $p(z) = 0$.

II/ On considère les nombres complexes $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ et $Z = \dfrac{(z_1)^5}{(z_2)^4}$.

1. Calculer le module et un argument de z_1, z_2 et Z.
2. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de Z.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

PROBLEME

Les parties A, B et C du problème sont, dans une large mesure, indépendantes.

Partie A

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = e^{3x-3} + x$. On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique 2 cm.
1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. Montrer que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en un point unique A d'abscisse α telle que $-1 < \alpha < 0$.
3. a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C_f) à $-\infty$. Préciser la position de (C_f) par rapport à (D).
b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter le résultat.
c) Tracer la courbe (C_f).
4. Soit λ un réel strictement positif. Calculer l'aire, en cm^2, de la portion du plan limitée par la courbe (C_f), et les droites d'équations $y = x$ $x = 0$ et $x = \lambda$.

Partie B

On se propose de résoudre l'équation différentielle (E_1) : $y'' - y - 6y = -1$.

1. Déterminer une fonction constante g solution de (E_1).

2. Soit h une fonction deux fois dérivables. Montrer que h est solution de (E_1) si, et seulement si, $h - g$ est solution de l'équation différentielle (E_2) : $y'' - y - 6y = 0$.

3. a) Résoudre l'équation (E_2).

b) Déterminer la solution k de (E_1) qui vérifie les conditions $k(1) = 1$ et $k'(1) = 3$.

Partie C

Un sac contient cinq boule noires et cinq boules blanches. On en prélève n au hasard, successivement, avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les événements :

A : « on obtient des boules des deux couleurs »

B ; « on obtient au plus une boule blanche »

1. a) Calculer la probabilité de l'événement « toutes les boules tirées sont de même couleur »

b) Calculer la probabilité de l'événement « on obtient exactement une boule blanche »

c) En déduire que $p(A \cap B) = \frac{n}{2^n}$, $p(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$ et $p(B) = \frac{n+1}{2^n}$.

2. Montrer que $p(A \cap B) = p(A)p(B)$ si, et seulement si, $2^{n-1} = n + 1$.

3. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 par

$$u_n = 2^{n-1} - n + 1.$$

a) Calculer u_1, u_2 et u_3

b) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

4. En déduire la valeur de l'entier n tel que les événements A et B soient indépendants.